Ad §5.9: Algebraischer Abschluss

Prop.: Für jeden Körper K sind äquivalent:

(a) Jedes nichtkonstante $f \in K[X]$ hat eine Nullstelle in K.

(b) Jedes Polynom in $K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren über K.

(c) Jedes Polynom in $K[X]$ vom Grad $n \geq 0$ besitzt, mit Vielfachheiten gezählt, genau n Nullstellen in K.

(d) Jede endliche Körpererweiterung von K ist gleich K.

(e) Jede algebraische " " " " " ".

Def.: Dann heisst K algebraisch abgeschlossen.

Bew.: (a)$\Leftrightarrow$(b)$\Leftrightarrow$(c) siehe LA1.

Aliter: Beweis (a) mit Stammkörper

(b)$\Rightarrow$(e): Sei L/K algebraisch und $a \in L$. Sei $m_{a,K}$ sein Minimalpolynom über K. Da es normiert und irred. ist, ist es nach (b) gleich $X-a$. Also ist $a \in K$ und somit $L=K$.

(e)$\Rightarrow$(d): Jede endliche Erweiterung ist algebraisch.

(d)$\Rightarrow$(b): Sei $f \in K[X] \setminus \{0\}$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Dann zerfällt f über L in Linearfaktoren. Also (d) $\Rightarrow$ $L=K$. qed.

Prop.: Je zwei alg. Abschlüsse von K sind isomorph über K.

Bew.: Seien L und L' zwei alg. Abschlüsse von K.

Wegen L/K algebraisch und L' algebraisch abgeschlossen existiert nach §5.7 ein Homomorphismus $\varphi: L \to L'$ über K.

Fixiere einen solchen und fasse via diesem L' als Oberkörper von L auf.

Dann ist L'/K algebraisch $\Rightarrow$ L'/L algebraisch.

und L algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow$ $L' \underset{\text{nach obiger Prop.}}{=} L$.

$$\begin{tikzcd} & L' \\ L \arrow[ur, "\varphi"] & \\ & K \arrow[ul] \arrow[uu, bend right] \end{tikzcd}$$

Also ist φ bijektiv, also ein Isomorphismus. qed.

Satz: Jeder Körper K besitzt einen algebraischen Abschluss.

Beweis: Sei $S_K := K[X]\setminus K$ die Menge aller nicht konstanten Polynome.

Lemma 1: Für alle $n \geq 0$ und alle $f_1, \dots, f_n \in S_K$ existiert eine endliche Erweiterung L/K, in der jedes von $f_1, \dots, f_n$ eine Nullstelle hat.

Beweis: Jeder Zerfällungskörper von $f_1 \cdots f_n$ hat es. qed.

Lemma 2: Es existiert eine algebraische Körpererweiterung K'/K, in der jedes $f \in S_K$ eine Nullstelle hat.

Beweis: Für jedes $f \in S_K$ wähle eine neue Variable X_f. Sei $R := K[(X_f)_{f\in S_K}]$ der Polynomring in allen diesen Variablen über K. Betrachte dann das von allen $f(X_f)$ für alle $f \in S_K$ erzeugte Ideal I.

Beh.: $I \neq R$.

Beweis: Wenn doch, dann ist $1 \in R$ eine Linearkombination der Erzeugenden. Also existieren $m \geq 0$ und $f_1, \dots, f_m \in S_K$ und $g_1, \dots, g_m \in R$

(*) mit $$1 = \sum_{i=1..m} g_i \cdot f_i(X_{f_i}).$$

Sind zwei der f_i gleich, so fassen wir diese zusammen und können danach annehmen, dass alle $f_1, \dots, f_m$ verschieden sind.

Jedes g_i hängt von einem Teil der $X_{f_1}, \dots, X_{f_m}$ und vielleicht noch von endlich vielen weiteren Variablen ab. Wähle also weitere $f_{m+1}, \dots, f_n \in S_K$, so dass alle g_i schon in $K[X_{f_1}, \dots, X_{f_n}]$ liegen.

Nach Lemma 1 wähle L/K sowie $a_i \in L$ für alle $1 \leq i \leq n$ mit $f_i(a_i) = 0$. Setze diese Werte in (*) ein durch $X_{f_i} := a_i$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{m} g_i(a_1, \dots, a_n) \cdot \underbrace{f_i(a_i)}_{=0} = 0 \quad \text{in } L$$

$\Rightarrow$ Widerspruch. qed (Beh.).

Nach dem Satz von Krull aus §1.11 und der Beh. existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ mit $I \subset \mathfrak{m}$.

Daher ist $K' := R/\mathfrak{m}$ ein Körper mit $K \hookrightarrow K'$.

Für jedes $f \in S_K$ sei $\alpha_f := X_f + m \in K'$ die Restklasse.

Dann gilt $f(\alpha_f) = f(X_f + m) \overset{!}{=} \underbrace{f(X_f)}_{\in I \subset m} + m = 0 + m$

also $f(\alpha_f) = 0$ in K'. Somit hat f eine Nullstelle in K'.

Außerdem ist R als Ring über K von allen X_f erzeugt.
Daher ist K' als Ring über K von allen α_f erzeugt.
Da diese algebraisch über K sind, folgt K'/K algebraisch.

qed (Lemma 2).

<u>Beweis des Satzes</u>: Konstruiere $K \subseteq K' \subset K'' \subset K''' \subset \ldots \subset K^{(n)} \subset \ldots$
durch wiederholte Anwendung von Lemma 2. Dann ist deren Vereinigung $L := \bigcup_{n \geq 0} K^{(n)}$ wieder eine Körpererweiterung von K, da jede endliche Rechnung ganz innerhalb eines $K^{(n)}$ stattfindet.

Da jedes $K^{(n+1)}/K^{(n)}$ algebraisch ist, ist nach Induktion $K^{(n)}/K$ algebraisch für alle $n \geq 0$. Somit ist auch L/K algebraisch.

Schließlich sei $f \in L[X]$ ein beliebiges nicht konstantes Polynom.
Dann $\exists n \geq 0$ mit $f \in K^{(n)}[X]$. Nach Konstruktion in Lemma 2 besitzt dann f eine Nullstelle in $K^{(n+1)}$.
Also auch in L. Somit ist L algebraisch abgeschlossen.

Zusammen ist also L ein algebraischer Abschluss von K. <u>qed</u>.

<u>Bem.</u>: Durch die im Satz von Krull implizite Verwendung des Zornschen Lemmas ist der Beweis <u>hochgradig</u> <u>nichtkonstruktiv</u>.